

热方程在非负 Ricci 曲率度量测度空间上的 Cauchy 问题*

孙萌

天津大学应用数学中心, 天津 300072

摘要: 设 (X, d, μ) 是满足非负 Ricci 曲率条件的度量测度空间。在上半空间 $X \times \mathbf{R}_+$ 上, 考虑热方程的 Cauchy 问题。热方程为

$$\begin{cases} \partial_x u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = 0, & x \in X, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in X, \end{cases}$$

其中 Δ_x 是 X 上的 Laplace 算子。我们得到了: 若 $u(x, t)$ 是热方程的解 (称其为热函数) 且满足 Carleson 测度条件

$$(*) \quad \sup_{x_B, r_B} \frac{1}{\mu(B(x_B, r_B))} \int_0^{r_B^2} \int_{B(x_B, r_B)} \left(|t \partial_t u| + |\sqrt{t} \nabla_x u| \right)^2 d\mu \frac{dt}{t} \leq C,$$

则它的迹 $u(x, 0) = f(x)$ 是有界平均振动 (BMO) 函数。反之, 迹满足 BMO 条件的所有热函数 $u(x, t)$ 恰好满足 Carleson 测度条件 (*) 式。

关键词: 热函数; 度量测度空间; BMO; Carleson 测度

中图分类号: O175.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2021) 05-0152-14

Cauchy problems for heat equations in metric measure spaces with non-negative Ricci curvature

SUN Meng

Center for Applied Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300072, China

Abstract: Let (X, d, μ) be a metric measure space with non-negative Ricci curvature. This paper is focuses on the Cauchy problem for the heat equation on the upper half-space $X \times \mathbf{R}_+$. The heat equation is

$$\begin{cases} \partial_x u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = 0, & x \in X, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in X, \end{cases}$$

where Δ_x is the Laplace operator on X . We derive that a function f of bounded mean oscillation BMO is the trace of solution $u(x, t)$ of heat equation above (called Caloric function), $u(x, 0) = f(x)$, whenever u satisfies the following Carleson measure condition

$$(*) \quad \sup_{x_B, r_B} \frac{1}{\mu(B(x_B, r_B))} \int_0^{r_B^2} \int_{B(x_B, r_B)} \left(|t \partial_t u| + |\sqrt{t} \nabla_x u| \right)^2 d\mu \frac{dt}{t} \leq C,$$

Conversely, the condition (*) characterizes all the Caloric functions whose traces are in BMO space.

Key words: Caloric function; metric measure space; BMO; Carleson measure

* 收稿日期: 2020-04-30 录用日期: 2020-06-05 网络首发日期: 2020-09-17
基金项目: 国家自然科学基金 (11922114, 11671039, 11771043)
作者简介: 孙萌 (1995年生), 女; 研究方向: 调和分析; E-mail: Sunmeng_666@163.com

1 引言及主要结果

在研究函数的边界问题时,人们通常采用“转化”的方式。比如我们研究热函数的 Cauchy 问题时,通常将其转化为研究将边界值函数通过“Gaussian 平均”后得到的函数。更确切地说,设 $h_t(x)$ 是定义在上半空间 \mathbf{R}_+^{n+1} 上的热核,并且 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, 令

$$u(x, t) := \int_{\mathbf{R}^n} h_t(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{|x - y|^2}{4t}\right\} f(y) dy.$$

则 $u(x, t)$ 是 \mathbf{R}_+^{n+1} 上的热函数,即满足热方程 $\partial_t u - \Delta_x u = 0$. 这样,我们就可以通过研究热函数 $u(x, t)$ 的性质来研究 f 的性质。

早在 1975 年, Fabes 和 Neri 在文献 [1] 中发现,若定义在 \mathbf{R}_+^{n+1} 上的热函数 $u(x, t)$ 满足下列 Carleson 测度条件

$$\sup_B \frac{1}{\mu(B)} \int_0^{r_B^2} \int_B |\sqrt{t} \nabla_x u(x, t)|^2 dx, \frac{dt}{t} \leq C < \infty, \quad (1)$$

则它的迹 $u(x, 0) = f(x)$ 属于 BMO 空间。反过来,所有迹满足 BMO 条件的热函数 $u(x, t)$ 恰好可用 (1) 式来刻画。该研究为解决在端点 $p = \infty$ 处的热方程的 Cauchy 问题提供了新的思路(因 BMO 空间可视为 Lebesgue 空间 $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的替代)。从那时起,大量的工作致力于研究联系 Schrödinger 算子 [2], Campanato 空间 [3], 调和函数类似刻画的推广等 [4-5]。

我们知道,有 Ricci 曲率下界的度量测度空间包括: Riemannian 流形在 Gromov-Hausdorff 度量下的极限空间,以及有非负曲率的 Alexandrov 空间。这些空间上的分析与几何研究在近二十年得到了广泛地关注与发展 [6-7]。本文的主要目的是证明当底空间 \mathbf{R}^n 被推广到有非负 Ricci 曲率的度量测度空间时,热函数关于 (1) 式有着相似的刻画结果。

本文设 (X, d, μ) 是满足适当非负 Ricci 曲率维数条件 $\text{RCD}^*(0, N)$ [8] (见第二节定义 9) 的度量测度空间,其中 $N \geq 1$ 。这样的空间 (X, d) 是完备的并且是可分的, μ 是在空间 X 上局部有限的 Borel 测度。下面给出 BMO 空间和 TMO 空间的定义。

定义 1 (BMO 空间) 设 f 是 X 上的局部可积函数。称 f 属于有界平均振动函数空间 $\text{BMO}(X)$, 如果

$$\|f\|_{\text{BMO}(X)} := \sup_B \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_{B(x_B, r_B)} |f - f_B|^2 d\mu \right)^{1/2} < \infty,$$

其中 $f_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu$.

定义 2 (TMO 空间) 设 u 是 $X \times \mathbf{R}_+$ 上的热函数,即 $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(X \times \mathbf{R}_+)$ 在分布意义下满足热方程 $\partial_t u - \Delta_x u = 0$. 称 u 属于温度平均振动函数空间 $\text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)$, 如果

$$\|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)} := \sup_{x_B, r_B} \left(\frac{1}{\mu(B(x_B, r_B))} \int_0^{r_B^2} \int_{B(x_B, r_B)} (|t \partial_t u| + |\sqrt{t} \nabla_x u|)^2 d\mu \frac{dt}{t} \right)^{1/2} < \infty.$$

下面给出本文的主要结论。

定理 1 设 (X, d, μ) 是 $\text{RCD}^*(0, N)$ 空间,其中 $N \geq 1$. 则 $u \in \text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)$ 当且仅当存在 $f \in \text{BMO}(X)$ 使得对任意的 $(x, t) \in X \times \mathbf{R}_+$ 有 $u(x, t) = H_t f(x)$ 成立,这里 H_t 表示 (X, d, μ) 上的 Gaussian 半群。并且存在常数 $C > 1$ 使得

$$C^{-1} \|f\|_{\text{BMO}(X)} \leq \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)} \leq C \|f\|_{\text{BMO}(X)}.$$

本文主要结构如下:第 2 节介绍了一些基本概念,如 Sobolev 空间,微分构造, Laplace 算子等。第 3 节给出了双倍性质,热核的 Gaussian 估计和 TMO 函数的性质。第 4 节则给出定理 1 的具体证明过程。为行文方便,本文出现的 C 和 c 均是与主要变量无关的正常数,用 $C_{(\alpha, \beta, \dots, \gamma)}$ 表示仅依赖于 $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ 的正常数,且以上符号在不同行可以表示不同的值。

2 预备知识

本节我们首先回顾一些基本的概念和相关符号表示。

2.1 度量测度空间上的 Sobolev 空间

设 (X, d) 是一个完备的度量空间, μ 为其上的一个 Borel 测度且 $\text{supp} \mu = X$. 设 $C([0, 1], X)$ 为赋上确界范数的从 $[0, 1]$ 到 X 上的连续曲线空间。映射 $e_t: C([0, 1], X) \rightarrow X$, 定义为

$$e_t(\gamma) = \gamma_t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

我们用 $P(C([0, 1], X))$ 表示定义在空间 $C([0, 1], X)$ 上 Borel 概率测度的集合。设 $p \geq 1$ 称 $\gamma \in AC^p([0, 1], X)$, 若存在 $g \in L^p([0, 1])$ 满足

$$d(\gamma_s, \gamma_t) \leq \int_s^t g(r) dr, \quad \forall 0 \leq s < t \leq 1.$$

显然有 $AC^p([0, 1], X) \subset AC^1([0, 1], X)$. 而 $AC^1([0, 1], X)$ 为绝对连续曲线的集合, 故对 $\gamma \in AC^p([0, 1], X)$, 可定义其度量导数为

$$|\dot{\gamma}_t| := \lim_{s \rightarrow t} \frac{d(\gamma_s, \gamma_t)}{|s - t|}, \quad t \in [0, 1].$$

定义 3 设 $\pi \in P(C([0, 1], X))$. 若 π 满足

(i) π 在 $AC^2([0, 1], X)$ 外测度为 0, 即 $\pi(C([0, 1], X) \setminus AC^2([0, 1], X)) = 0$, 且

$$\int_{C([0, 1], X)} \int_0^1 |\dot{\gamma}_t|^2 dt d\pi(\gamma) < \infty;$$

(ii) 若存在常数 $C > 0$, 使得对任意 $0 \leq t \leq 1$, 有

$$(e_t)_\# \pi = \pi \circ (e_t^{-1}) \leq C\mu,$$

则称 π 是一个测试方案。

定义 4 (Sobolev 空间) 设 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 是 Borel 函数。若存在非负函数 $G \in L^2_{\text{loc}}(X)$ (或 $G \in L^2(X)$), 使得对每一个测试方案 π , 均满足

$$\int_{C([0, 1], X)} |f(\gamma_1) - f(\gamma_0)| d\pi(\gamma) \leq \int_{C([0, 1], X)} \int_0^1 G(\gamma_t) |\dot{\gamma}_t|^2 dt d\pi(\gamma), \quad (2)$$

则称 f 属于 Sobolev 空间 $S^2_{\text{loc}}(X)$ (或 $S^2(X)$) .

借助紧致性理论, 可以证明对每一个 $f \in S^2(X)$, 存在唯一的极小函数 G (G 关于 μ 是几乎处处定义的) 使得 (2) 式成立。用 $|\nabla f|$ 表示 G , 并且称它为 f 的最小弱上界梯度, 具体细节参见文献 [9]。

定义 5 (非齐次 Sobolev 空间) 若 $f \in S^2(X) \cap L^2(X)$ 并赋予以下范数

$$\|f\|_{W^{1,2}(X)} := (\|f\|_{L^2(X)}^2 + \|\nabla f\|_{L^2(X)}^2)^{1/2},$$

则称 f 属于非齐次 Sobolev 空间 $W^{1,2}(X)$.

设 Ω 是 X 中的开集, 通常用 $W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ 表示局部 Sobolev 空间, 具体细节参见文献 [10]。

2.2 微分构造和 Laplace 算子

下文中介绍的概念主要来自文献 [8] 和 [11]。

定义 6 (无穷小 Hilbert 空间) 设 (X, d, μ) 是度量测度空间。若 $W^{1,2}(X)$ 是 Hilbert 空间, 则称 (X, d, μ) 是无穷小 Hilbert 空间。

由定义 6 我们可推断出 (X, d, μ) 是无穷小 Hilbert 空间当且仅当如下平行四边形法则成立:

$$\|\nabla(f+g)\|_{L^2(X)}^2 + \|\nabla(f-g)\|_{L^2(X)}^2 = 2(\|\nabla f\|_{L^2(X)}^2 + \|\nabla g\|_{L^2(X)}^2), \quad \forall f, g \in S^2(X).$$

定义 7 (内积) 设 (X, d, μ) 是无穷小 Hilbert 空间, Ω 是 X 中的开集, 定义在 Ω 上的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是如下几乎处处定义的实值函数:

$$\langle \nabla f, \nabla g \rangle := \inf_{\varepsilon > 0} \frac{|\nabla(g + \varepsilon f)|^2 - |\nabla g|^2}{2\varepsilon}, \quad \forall f, g \in S^2_{\text{loc}}(X),$$

其中 \inf 表示本性下确界。

由内积的定义可以看出 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是局部, 对称且线性的, 并且满足 Cauchy-Schwarz 不等式、Leibniz 法则

和链式法则，具体细节参见文献 [11]。借助内积我们引入如下 Laplace 算子。

定义 8 (Laplace 算子) 设 (X, d, μ) 是无穷小 Hilbert 空间。对任意 $f \in W_{loc}^{1,2}(X)$ (或 $W^{1,2}(X)$)，若存在函数 $g \in L_{loc}^2(X)$ (或 $g \in L^2(X)$) 使得对任意具有紧支集的函数 $\varphi \in W^{1,2}(X)$ ，均有如下等式成立

$$\int_X \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle d\mu = - \int_X g \varphi d\mu,$$

则称 f 属于 $\mathcal{D}_{loc}(\Delta)$ (或 $\mathcal{D}(\Delta)$)。用 Δf 来表示函数 g ，并称其为 f 的 Laplacian。

显然，Laplace 算子是线性的。由 Leibniz 法则知，如果 $f, g \in \mathcal{D}_{loc}(\Delta) \cap L_{loc}^\infty(X)$ (或 Lipschitz 连续函数 $f, g \in \mathcal{D}(\Delta) \cap L^\infty(X)$)，则 $fg \in \mathcal{D}_{loc}(\Delta)$ (或 $fg \in \mathcal{D}(\Delta)$)，且满足 $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ 。

2.3 曲率维数条件

设 (X, d, μ) 是无穷小 Hilbert 空间。 H_t 可以表示为在 Dirichlet 形式下由积分 $\int_X \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\mu$ 生成的热流 $e^{t\Delta}$ 。显然， (X, d, μ) 是无穷小 Hilbert 空间蕴含着 H_t 是线性的。

接下来我们回顾 $RCD^*(0, N)$ 空间的定义，文献 [12] 介绍了关于该空间的一些等价特性。

定义 9 ($RCD^*(0, N)$ 空间) 设 (X, d, μ) 是无穷小 Hilbert 空间。若对任意 $f \in W^{1,2}(X)$ ，有

$$\left| \nabla H_t f(x) \right|^2 + \frac{2t}{N} \left| \Delta H_t f(x) \right|^2 \leq H_t \left(\left| \nabla f \right|^2 \right) (x), \mu^- \text{ a.e. } x \in X \text{ \& } t > 0,$$

则称 (X, d, μ) 为 $RCD^*(0, N)$ 空间，其中 $N \geq 1$ 。

2.4 Hardy 空间^[13]与 BMO 空间

定义 10 (Hardy 空间) 设 (X, d, μ) 是度量测度空间，定义 Hardy 空间 $H^1(X)$ 为

$$H^1(X) := \{ f \in L^1(X) : S(f) \in L^1(X) \},$$

并赋予函数 f 范数

$$\|f\|_{H^1(X)} := \|S(f)\|_{L^1(X)},$$

这里 $S(f)$ 为如下的 Lusin 面积函数

$$S(f)(x) := \left(\iint_{\Gamma(x)} |t(-\Delta)H_t f(z)|^2 \frac{d\mu(z)}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} \frac{dt}{t} \right)^{1/2},$$

其中 $\Gamma(x) := \{(z, t) \in X \times \mathbf{R}_+, d(z, x) < \sqrt{t}\}$ 。

3 热核上界和 TMO 函数的性质

为建立热核的 Gaussian 估计及 TMO 函数的性质，我们首先给出测度 μ 的性质。

命题 1 设 (X, d, μ) 是 $RCD^*(0, N)$ 空间，其中 $N \geq 1$ ，则测度 μ 有双倍性质，即对任意 $x \in X$ ， $0 < r < R < \infty$ 有

$$\frac{\mu(B(x, R))}{\mu(B(x, r))} \leq \left(\frac{R}{r}\right)^N.$$

证明 双倍性质是由 Sturm^[14] 建立，也可参见文献 [8]。

由 Rajala^[15] 知，对于任意的 $f \in W^{1,2}(B)$ ，有如下 Poincaré 不等式成立

$$(P) \quad \frac{1}{\mu(B)} \int_{B(x,r)} |f - f_B|^2 d\mu \leq \frac{1}{\mu(B)} Cr^2 \int_{B(x,r)} |\nabla f|^2 d\mu.$$

命题 2 设 (X, d, μ) 是 $RCD^*(0, N)$ 空间，其中 $N \geq 1$ ，则有以下结论成立：

(i) Gaussian 上界：对任意 $x, y \in X$ ， $t > 0$ ，有

$$\max_{k \in \{0\} \cup \mathbf{N}} \{ |t^k \partial_t^k h_t(x, y)| \} + |\sqrt{t} \nabla_y h_t(x, y)| \leq \frac{C}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} \exp \left\{ - \frac{d^2(x, y)}{ct} \right\};$$

(ii) 对任意 $y \in X$ ， $s > 0$ ，则 $\partial_s h_s(\cdot, y) \in H^1(X)$ 。

证明 (i) 热核及其梯度的 Gaussian 上界参见文献 [10, 16]。

(ii) 由定义 10 知，只需证 $\partial_s p_s(\cdot, y) \in H^1(X)$ ，即

$$\left(\iint_{\Gamma(x)} \left| t(-\Delta)H_t(\partial_s p_s(\cdot, y))(z) \right|^2 \frac{d\mu(z)}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} < \infty.$$

由半群理论知 $t(-\Delta)H_t(\partial_s h_s(\cdot, y))(z)$ 是算子 $t(-\Delta)^2 H_{t+s}$ 的核。因此利用热核的 Gaussian 上界和双倍性质可得, 对任意 $(z, t) \in \Gamma(x)$, 有

$$\begin{aligned} \left| t(-\Delta)H_t(\partial_s h_s(\cdot, y))(z) \right| &\leq C \frac{t}{(t+s)^2} \left| r^2 \frac{\partial^2 h_r(x, y)}{\partial r^2} \right|_{r=t+s} \leq C \frac{t}{(t+s)^2} \frac{1}{\mu(B(y, (t+s)^{1/2}))} \exp\left\{ -\frac{d^2(y, z)}{c(t+s)} \right\} \\ &\leq C \frac{t}{(t+s)^2} \frac{(t+s)^{1/2}}{\sqrt{s} + \sqrt{t} + d(y, z)} \frac{1}{\mu(B(y, \sqrt{s} + d(x, y)))} \\ &\leq C \frac{t}{(t+s)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{s} + d(x, y)} \frac{1}{\mu(B(y, \sqrt{s} + d(x, y)))}. \end{aligned}$$

最后一个不等式成立是因为 $\sqrt{t} + d(y, z) \geq d(x, z) + d(y, z) \geq d(x, y)$. 由此可得

$$\begin{aligned} S(\partial_s h_s(\cdot, y))(x) &= \left(\iint_{\Gamma(x)} \left| t(-\Delta)H_t(\partial_s h_s(\cdot, y))(z) \right|^2 \frac{d\mu(z)}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ &\leq C \frac{1}{\sqrt{s} + d(x, y)} \frac{1}{\mu(B(y, \sqrt{s} + d(x, y)))} \left(\iint_{\Gamma(x)} \frac{t^2}{(t+s)^3} \frac{d\mu(z)}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ &\leq C \frac{1}{\sqrt{s} + d(x, y)} \frac{1}{\mu(B(y, \sqrt{s} + d(x, y)))} \left(\int_0^\infty \frac{t^2}{(t+s)^3} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{s} \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s} + d(x, y)} \frac{1}{\mu(B(y, \sqrt{s} + d(x, y)))}. \end{aligned}$$

该估计蕴含着 $\partial_s h_s(\cdot, y) \in H^1(X)$. 命题证毕

由以上倍测度性质及热核的估计, 以及 Duong-Yan [17] 可知,

注 1 (BMO 空间等价刻画) 若局部可积函数 f 属于 $BMO(X)$, 当且仅当存在 $x_0 \in X$ 和 $\beta > 0$, 使得以下结论均成立

- (i) $f \in L^2((1 + d(x, x_0))^{-\beta} \mu(B(x_0, 1 + d(x, x_0))))^{-1} d\mu$;
- (ii) $\sup_B \left(\frac{1}{\mu(B)} \left| f - H_{r^2} f \right|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq C < \infty$,

其中对任意 $t > 0$, $H_t f$ 是 f 的 Gaussian 平均。

引理 1 设 (X, d, μ) 是 $RCD^*(0, N)$ 空间, 其中 $N \geq 1$. 则有如下结论成立

(i) 若存在方体 $Q = B(x, r) \times (t - r^2, t + r^2) \subset X \times \mathbf{R}_+$ 使得热方程 $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ 成立, 则对 $\gamma \in (0, 1)$ 存在常数 $C = C(N, \gamma) > 0$, 有

$$\sup_{\gamma Q} |u| \leq \frac{C}{\mu(Q)} \int_Q |u| d\mu dt,$$

其中抛物方体 $Q = B(x, r) \times (t - r^2, t + r^2)$.

(ii) 若 $u \in TMO(X \times \mathbf{R}_+)$, 则存在常数 $C > 0$, 使得

$$|t \partial_t u(x, t)| + |\sqrt{t} \nabla_x u(x, t)| \leq C \|u\|_{TMO(X \times \mathbf{R}_+)}.$$

证明 (i) 参见文献 [18] 的第三部分。

(ii) 由文献 [19] 可知 $\partial_t u(x, t)$ 是热方程在 $X \times (0, \infty)$ 上的解。由 (i) 及 Hölder 不等式得

$$|t \partial_t u(x, t)| \leq C \frac{t^2}{\mu(B)} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} \partial_s u(y, s) d\mu(y) ds \leq C \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} |s \partial_s u(y, s)|^2 d\mu(y) \frac{ds}{s} \right)^{1/2} \leq C \|u\|_{TMO(X \times \mathbf{R}_+)}.$$

对 $|\sqrt{t} \nabla_x u(x, t)|$, 我们应用文献 [20] 来证明。该文献表明, 在 $RCD^*(0, N)$ 空间 (X, d, μ) 上, v 是热方

程在 $B(x_0, 2R) \times (0, T^*)$ 上的正解，则对 $T \in (0, T^*)$ 其满足

$$\sup_{B(x_0, R) \times (\beta T, T]} (|\nabla \ln v|^2 - \alpha \partial_t \ln v) \leq C(N, \alpha, \beta) \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{R^2} \right), \tag{3}$$

其中 $\alpha > 1, \beta \in (0, 1)$.

令

$$\tilde{u}(y, s) := u(y, s) - \frac{t}{\mu(B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2}))} \int_{t/2}^{3t/2} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} u(y, r) \, d\mu dr.$$

由 u 是热方程在 $X \times (0, \infty)$ 上的解，可知 \tilde{u} 也是该热方程的解。记

$$v = \tilde{u} + C \left(\frac{t}{\mu(B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2}))} \int_{t/2}^{3t/2} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} |\tilde{u}(y, s)|^2 \, d\mu(y) ds \right)^{1/2}.$$

并取 C 充分大，由 (i) 可知在 $B(x, \frac{\sqrt{2t}}{4}) \times (\frac{3t}{4}, \frac{5t}{4})$ 上 $v > 0$. 在 (3) 中取定 $\alpha = 2, R = \sqrt{2t}/4, T = 9t/8, \beta = 7/9$, 可得

$$\sup_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{4}) \times (\frac{7t}{8}, \frac{9t}{8})} (|\nabla \ln v|^2 - \alpha \partial_s \ln v) \leq C(N, \alpha, \beta) \frac{1}{t}.$$

进一步，

$$\begin{aligned} \sup_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{4}) \times (\frac{7t}{8}, \frac{9t}{8})} |\nabla u|^2 &= \sup_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{4}) \times (\frac{7t}{8}, \frac{9t}{8})} |\nabla \tilde{u}|^2 = \sup_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{4}) \times (\frac{7t}{8}, \frac{9t}{8})} |\nabla v|^2 \leq C \sup_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{4}) \times (\frac{7t}{8}, \frac{9t}{8})} \left(\frac{|v|^2}{t} + |v \partial_s v| \right) \\ &\leq C \sup_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{4}) \times (\frac{7t}{8}, \frac{9t}{8})} \left(\frac{|v|^2}{t} + \frac{|v|^2}{t} + t |\partial_s v|^2 \right) \leq C \sup_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{4}) \times (\frac{7t}{8}, \frac{9t}{8})} \left(\frac{|v|^2}{t} + t |\partial_s \tilde{u}|^2 \right) \\ &\leq \frac{C}{\mu(B)} \left(\int_{t/2}^{3t/2} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} |\tilde{u}(y, s)|^2 \, d\mu(y) ds \right) + C \sup_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{4}) \times (\frac{7t}{8}, \frac{9t}{8})} t |\partial_s u|^2. \end{aligned}$$

以上，最后一步中我们用了条件 (i) 来控制 $|v|^2$. 由 \tilde{u} 的选取可知

$$\begin{aligned} \int_{t/2}^{3t/2} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} |\tilde{u}(y, s)|^2 \, d\mu(y) ds &= \int_{t/2}^{3t/2} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} \left| u(y, s) - \frac{t}{\mu(B)} \int_{t/2}^{3t/2} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} u(y, r) \, d\mu dr \right|^2 \, d\mu(y) ds \\ &\leq 2 \int_{t/2}^{3t/2} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} \left\{ \left| u(y, s) - \frac{1}{\mu(B)} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} u(y, s) \, d\mu \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{t}{\mu(B)} \int_{t/2}^{3t/2} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} [u(z, r) - u(z, s)] \, d\mu dr \right|^2 \right\} \, d\mu(y) ds. \end{aligned}$$

对于积分号中的第一项，运用 Poincaré 不等式可知

$$\begin{aligned} \int_{t/2}^{3t/2} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} \left| u(y, s) - \frac{1}{\mu(B)} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} u(y, s) \, d\mu \right|^2 \, d\mu(y) ds \\ \leq C \int_{t/2}^{3t/2} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} |\sqrt{s} \nabla u(y, s)|^2 \, d\mu(y) ds \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}^2. \end{aligned}$$

对于第二项，由 $|t \partial_t u(x, t)| \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}$ 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} \left| \frac{t}{\mu(B)} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} [u(z, r) - u(z, s)] d\mu dr \right|^2 \mu(y) ds \\ & \leq \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \left| \frac{t}{\mu(B)} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} \int_r^s |\partial_w u(z, w)| dw d\mu dr \right|^2 ds \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}^2 \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \left| t \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_r^s \frac{1}{w} dw dr \right|^2 ds \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}^2. \end{aligned}$$

结合之前对 $s|\partial_s u|$ 的估计, 可得

$$|\sqrt{s} \nabla u|^2 \leq C \left(\frac{t}{\mu(B)} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2})} |\tilde{u}(y, s)|^2 d\mu(y) ds \right) + C \sup_{B(x, \frac{\sqrt{2t}}{2}) \times (\frac{7t}{8}, \frac{9t}{8})} s^2 |\partial_s u|^2 \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}^2.$$

引理证毕

引理 2 设 (X, d, μ) 是 $\text{RCD}^*(0, N)$ 空间, 其中 $N \geq 1$. 若 $u \in \text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)$, 则有如下结论成立

- (i) 对任意 $\varepsilon > 0$, u_ε 的 Gaussian 平均 $H_t u_\varepsilon$ 在 $X \times \mathbb{R}_+$ 上是良定义的, 其中 $u_\varepsilon(\cdot) = u(\cdot, \varepsilon)$;
- (ii) 对任意 $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ 和 $\beta > 0$, 存在常数 $C_{(x_0, \varepsilon, \beta)} > 0$ 使得

$$\int_X \frac{|u_\varepsilon(x)|^2}{\left(1 + d(x, x_0)\right)^\beta \mu\left(B\left(x_0, 1 + d(x, x_0)\right)\right)} d\mu(x) \leq C_{(x_0, \varepsilon, \beta)};$$

- (iii) 对任意 $x \in X$, $t > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 有

$$u(x, t + \varepsilon) = H_t u_\varepsilon(x);$$

- (iv) 对任意 $x \in X$, $t > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 有

$$\|H_t u_\varepsilon\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)};$$

- (v) 函数族 $\{u_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon > 0}$ 在 $\text{BMO}(X)$ 中是一致有界的。

证明 (i) 对于任意取定的 $x \in X$ 和 $t > 0$, 有

$$|H_t u_\varepsilon(x)| \leq \int_X |h_t(x, y) u_\varepsilon(y)| d\mu(y) \leq \int_X h_t(x, y) |u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)| d\mu(y) + |u_\varepsilon(x)|,$$

故只需对第一项进行估计。若 $y \in B(x, 2\sqrt{\varepsilon})$, 由引理 1 可知

$$|u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)| = |u(y, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| \leq \sup_{\xi \in B(x, \varepsilon)} |\nabla_\xi u(\xi, \varepsilon) d(x, y)| \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \frac{d(x, y)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

若 $y \in B(x, 2\sqrt{\varepsilon})^c$, 同样由引理 1 可得

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)| & \leq |u(y, \varepsilon) - u(y, d^2(x, y))| + |u(y, d^2(x, y)) - u(x, d^2(x, y))| + |u(x, d^2(x, y)) - u(x, \varepsilon)| \\ & \leq \sup_{\xi \in B(x, d(x, y))} |\nabla_\xi u(\xi, d^2(x, y))| d(x, y) + 2 \int_\varepsilon^{d^2(x, y)} \sup_{z \in X} |\partial_s u(z, s)| ds \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \left\{ 1 + \int_\varepsilon^{d^2(x, y)} \frac{ds}{s} \right\} \\ & \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \ln \frac{d^2(x, y)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

综上所述可知

$$|u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)| \leq \begin{cases} C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \frac{d(x, y)}{\sqrt{\varepsilon}}, & y \in B(x, 2\sqrt{\varepsilon}), \\ C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \ln \frac{d^2(x, y)}{\varepsilon}, & y \in B(x, 2\sqrt{\varepsilon})^c. \end{cases} \quad (4)$$

记 $B = B(x, 2\sqrt{\varepsilon})$, 利用 (4) 式、Gaussian 上界和双倍性质, 进一步得到

$$\begin{aligned}
 |H_t u_\varepsilon(x)| &\leq \int_{B(x, 2\sqrt{\varepsilon})} h_t(x, y) |u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)| d\mu(y) + \int_{B(x, 2\sqrt{\varepsilon})^c} h_t(x, y) |u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)| d\mu(y) + |u_\varepsilon(x)| \\
 &\leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \left\{ \int_{B(x, 2\sqrt{\varepsilon})} \frac{d(x, y) e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}}}{\sqrt{\varepsilon} \mu(B(x, \sqrt{t}))} d\mu(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k B \setminus 2^{k-1} B} \frac{\ln 2^{2k} e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}}}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} d\mu(y) \right\} + |u_\varepsilon(x)| \\
 &\leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \left\{ \int_{B(x, 2\sqrt{\varepsilon})} \frac{\sqrt{t} e^{-\frac{d(x, y)^2}{2t}}}{\sqrt{\varepsilon} \mu(B(x, \sqrt{t}))} d\mu(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k B \setminus 2^{k-1} B} \frac{\ln 2^{2k} e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}}}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} d\mu(y) \right\} + |u_\varepsilon(x)| \\
 &\leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \left\{ \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\varepsilon}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} + |u_\varepsilon(x)| \leq C \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\varepsilon}} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} + |u_\varepsilon(x)| < \infty.
 \end{aligned}$$

从而, $H_t u_\varepsilon(x)$ 在 $X \times \mathbb{R}_+$ 是良定义的。由此, 进一步可知

$$\left| t \partial_t H_t u_\varepsilon(x) \right| = \left| \int_X t \partial_t h_t(x, y) (u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)) d\mu(y) \right| \leq C \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\varepsilon}} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}. \tag{5}$$

(ii) 记 $B = B(x, 2\sqrt{\varepsilon})$, 利用 (4) 式可推出

$$\begin{aligned}
 \int_X \frac{|u_\varepsilon(x)|^2}{(1 + d(x, x_0))^\beta \mu(B(x_0, 1 + d(x, x_0)))} d\mu(x) &\leq 2 \int_X \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x_0)|^2 + |u_\varepsilon(x_0)|^2}{(1 + d(x, x_0))^\beta \mu(B(x_0, 1 + d(x, x_0)))} d\mu(x) \\
 &\leq C_{(x_0, \varepsilon, t)} \left\{ \int_{B(x_0, 2\sqrt{\varepsilon})} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k B \setminus 2^{k-1} B} \right\} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x_0)|^2}{(1 + d(x, x_0))^\beta \mu(B(x_0, 1 + d(x, x_0)))} d\mu(x) + C_{(x_0, \varepsilon, t)} \\
 &\leq C_{(x_0, \varepsilon, t)} \left\{ \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\beta/2} \right) \right\} + C_{(x_0, \varepsilon, t)} \leq C_{(x_0, \varepsilon, t)}.
 \end{aligned}$$

(iii) 首先证对任意 $x \in X$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} H_t(u(\cdot, \varepsilon))(x) = u_\varepsilon(x)$ 。为此, 我们作如下分解

$$H_t u_\varepsilon(x) = H_t(u_\varepsilon \chi_{d(\cdot, x) < 1})(x) + H_t(u_\varepsilon \chi_{d(\cdot, x) \geq 1})(x) = I_1 + I_2.$$

对于 I_1 , 显然有 $\lim_{t \rightarrow 0^+} H_t(u_\varepsilon \chi_{d(\cdot, x) < 1})(x) = u_\varepsilon(x)$ 。

对于 I_2 , 利用 Gaussian 上界、双倍性质, 引理 2 (ii) 和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
 \left| H_t(u_\varepsilon \chi_{d(\cdot, x) \geq 1})(x) \right| &= \int_{d(x, y) \geq 1} h_t(x, y) |u(y, \varepsilon)| d\mu(y) \\
 &\leq C \int_{d(x, y) \geq 1} \frac{1}{\mu(B(x, 2d(x, y)))} \left(\frac{2d(x, y)}{\sqrt{t}} \right)^{-1} |u(y, \varepsilon)| d\mu(y) \\
 &\leq C \sqrt{t} \int_X \frac{|u(y, \varepsilon)|^2}{(1 + d(x, y)) \mu(B(x, 1 + d(x, y)))} d\mu(y) < C_{(x, \varepsilon)} \sqrt{t}.
 \end{aligned}$$

所以 $\lim_{t \rightarrow 0^+} H_t(u_\varepsilon \chi_{d(\cdot, x) \geq 1})(x) = 0$ 。故对任意 $x \in X$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} H_t(u(\cdot, \varepsilon))(x) = u_\varepsilon(x)$ 。

最后, 令 $w(x, t) = \partial_t u(x, t + \varepsilon) - H_t(\partial_\varepsilon u_\varepsilon)(x)$, 显然 $w(x, t)$ 也是热方程的解且 $w(x, 0) = 0$, 即满足

$$\begin{cases} \partial_t w(x, t) - \Delta_x w(x, t) = 0, & x \in X, \quad t > 0, \\ w(x, 0) = 0, & x \in X. \end{cases}$$

由引理 1 的 (ii) 可知

$$|w(x, t)| = \left| \partial_t u(x, t + \varepsilon) - H_t(\partial_\varepsilon u_\varepsilon)(x) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{\text{HMO}(X \times \mathbb{R}_+)},$$

即 w 有界。故由空间是随机完备的, 可知 $w \equiv 0$, 即对任意的 $x \in X$, $t, \varepsilon > 0$,

$$\partial_t u(x, t + \varepsilon) - H_t(\partial_\varepsilon u_\varepsilon)(x) \equiv 0.$$

接下来, 我们利用 Chen 在文献 [5] 中的一个方法。注意到

$$\partial_t u(x, t + \varepsilon) - H_t(\partial_\varepsilon u_\varepsilon)(x) = \partial_\varepsilon u(x, t + \varepsilon) - \partial_\varepsilon H_t(u_\varepsilon)(x) \equiv 0,$$

以及因此

$$\partial_\varepsilon \partial_t u(x, t + \varepsilon) - \partial_\varepsilon \partial_t H_t(u_\varepsilon)(x) \equiv 0$$

由引理 1 (ii) 以及式 (5) 可得

$$\partial_t u(x, t + \varepsilon) - \partial_t H_t(u_\varepsilon)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (\partial_t u(x, t + \varepsilon) - \partial_t H_t(u_\varepsilon)(x)) = 0.$$

故存在 $f(x, \varepsilon)$ 使得对于任意的 $x \in X$, $t, \varepsilon > 0$,

$$u(x, t + \varepsilon) - H_t(u_\varepsilon)(x) = f(x, \varepsilon).$$

令 $t \rightarrow 0$, 可知 $f(x, \varepsilon) \equiv 0$, 即 $u(x, t + \varepsilon) = H_t(u_\varepsilon)(x)$. 引理 2 (iii) 证毕

(iv) 下面分两种情况进行证明。若 $r_B^2 \geq \varepsilon$, 利用换元和双倍性质可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu(B)} \int_0^{r_B^2} \int_{B(x_B, r_B)} (|t \partial_t u(x, t + \varepsilon)| + |\sqrt{t} \nabla_x u(x, t + \varepsilon)|)^2 d\mu \frac{dt}{t} \\ & \leq \frac{C}{\mu(B)} \int_\varepsilon^{r_B^2 + \varepsilon} \int_{B(x_B, r_B)} (|t \partial_t u(x, t)| + |\sqrt{t} \nabla_x u(x, t)|)^2 d\mu \frac{dt}{t} \\ & \leq \frac{C}{\mu(B)} \int_0^{(2r_B)^2} \int_{B(x_B, r_B)} (|t \partial_t u(x, t)| + |\sqrt{t} \nabla_x u(x, t)|)^2 d\mu \frac{dt}{t} \\ & \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}^2. \end{aligned}$$

若 $r_B^2 < \varepsilon$, 利用引理 2 (iii) 和引理 1 (ii) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu(B)} \int_0^{r_B^2} \int_{B(x_B, r_B)} (|t \partial_t u(x, t + \varepsilon)| + |\sqrt{t} \nabla_x u(x, t + \varepsilon)|)^2 d\mu \frac{dt}{t} \\ & \leq \frac{C}{\mu(B)} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}^2 \int_0^{r_B^2} \int_{B(x_B, r_B)} \left(\frac{t^2}{(t + \varepsilon)^2} + \frac{t}{t + \varepsilon} \right) d\mu \frac{dt}{t} \\ & \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}^2 \int_0^\varepsilon \frac{t}{t + \varepsilon} \frac{dt}{t} \\ & \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}^2. \end{aligned}$$

(v) 任取 $g \in L^2(X)$ 且紧支撑于球 B 内, 对任意 $x \in X$ 和 $t > 0$, 设

$$F(x, t) = t \partial_t H_t u_\varepsilon \ \& \ G(x, t) = t \partial_t H_t (I - H_{t/2}) g(x).$$

第一步 证明存在常数 $C > 0$ 使得

$$\int_0^\infty \int_X |FG| d\mu \frac{dt}{t} \leq C [\mu(B)]^{1/2} \|g\|_{L^2(B)} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}. \quad (6)$$

作如下分解:

$$\int_0^\infty \int_X |FG| d\mu \frac{dt}{t} = J_0 + \sum_{k=1}^\infty J_k,$$

其中 $\widehat{2^k B} = 2^k B \times (0, (2^k r_B)^2)$.

对于 J_0 , 由谱定理^[20] 可得

$$\int_X \int_0^\infty |t \partial_t H_t h|^2 \frac{dt}{t} d\mu = \frac{1}{4} \int_X |h|^2 d\mu, \quad \forall h \in L^2(X). \quad (7)$$

再结合 Hölder 不等式, 引理 2 (iv) 和双倍性质推出

$$\begin{aligned}
 J_0 &\leq \left(\int_0^{(2r_B)^2} \int_{2B} |t \partial_t H_t u_\varepsilon|^2 d\mu \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \left(\int_0^{(2r_B)^2} \int_{2B} |t \partial_t H_t (I - H_{r_B^2}) g|^2 \frac{dt}{t} d\mu \right)^{1/2} \\
 &\leq C [\mu(2B)]^{1/2} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \left(\int_X |(I - H_{r_B^2}) g|^2 d\mu \right)^{1/2} \\
 &\leq C [\mu(B)]^{1/2} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \|g\|_{L^2(B)}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

对于 J_k , 先估计被积函数 $G(x, t)$, 我们把 $2^{k+1}B \setminus 2^k B$ 分成两个部分:

$$(2^{k+1}B \setminus 2^k B) \times (0, (2^{k+1}r_B)^2) \& 2^k B \times ((2^k r_B)^2, (2^{k+1}r_B)^2).$$

当 $(x, t) \in (2^{k+1}B \setminus 2^k B) \times (0, (2^{k+1}r_B)^2)$ 时, 由 Gaussian 上界和双倍性质可得

$$\begin{aligned}
 |G(x, t)| &= \left| \int_0^{r_B^2} \frac{ts}{(t+s)^2} \frac{ds}{s} \int_X r^2 \frac{\partial^2 h_r(x, y)}{\partial r^2} \Bigg|_{r=t+s} g(y) d\mu(y) \right| \\
 &\leq C \int_0^{r_B^2} \frac{ts}{(t+s)^2} \frac{ds}{s} \int_B \left(\frac{t+s}{t+s+d^2(x, y)} \right) \frac{|g(y)|}{\mu(B(x, t+s+d(x, y)))} d\mu(y) \\
 &\leq \frac{C}{(2^k r_B)^2} \frac{\|g\|_{L^1(B)}}{\mu(2^{k+1}B)} \int_0^{r_B^2} \frac{ts}{t+s} \frac{ds}{s} = \frac{C}{2^{2k}} \frac{\|g\|_{L^1(B)}}{\mu(2^{k+1}B)} \frac{t}{r_B^2} \ln \left(1 + \frac{r_B^2}{t} \right).
 \end{aligned}$$

将该估计带入到 J_k 中并利用 Hölder 不等式和 (iv) 可得

$$\begin{aligned}
 J_k &\leq C \frac{\|g\|_{L^1(B)}}{2^{2k}} \left(\int_0^{(2^{k+1}r_B)^2} \int_{2^{k+1}B} |t \partial_t H_t u_\varepsilon|^2 d\mu \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\
 &\leq C \frac{\|g\|_{L^2(B)}}{2^{2k}} [\mu(B)]^{1/2} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \left(\int_0^{2^{2(k+1)}} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right)^{1/2} \\
 &\leq C 2^{-k} [\mu(B)]^{1/2} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \|g\|_{L^2(B)}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

当 $(x, t) \in (2^k B) \times ((2^k r_B)^2, (2^{k+1}r_B)^2)$ 时, 同理可得

$$\begin{aligned}
 |G(x, t)| &\leq C \int_0^{r_B^2} \frac{ts}{(t+s)^2} \frac{ds}{s} \int_B \left(\frac{t+s}{t+s+d^2(x, y)} \right) \frac{|g(y)|}{\mu(B(x, t+s+d(x, y)))} d\mu(y) \\
 &\leq C \int_0^{r_B^2} \frac{1}{t} ds \int_B \frac{|g(y)|}{\mu(B(x, t))} d\mu(y) \leq C 2^{-k} \|g\|_{L^1(B)}.
 \end{aligned}$$

将该估计带入到 J_k 中并利用 Hölder 不等式可得

$$J_k \leq C 2^{-k} \|g\|_{L^1(B)} \int_{(2^k r_B)^2}^{(2^{k+1}r_B)^2} \int_{2^k B} |F| d\mu \frac{dt}{t} \leq C 2^{-k} \|g\|_{L^1(B)} \left(\int_{(2^k r_B)^2}^{(2^{k+1}r_B)^2} \int_{2^k B} |F|^2 d\mu \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \leq C 2^{-k} [\mu(B)]^{1/2} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)} \|g\|_{L^2(B)}. \tag{10}$$

因此, 由 (8), (9) 和 (10) 式可推出

$$\int_0^\infty \int_X |FG| d\mu \frac{dt}{t} \leq C [\mu(B)]^{1/2} \|g\|_{L^2(B)} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbb{R}_+)}.$$

第二步 证明下述等式成立

$$\int_X u_\varepsilon (I - H_{r_B^2}) g d\mu = 4 \int_0^\infty \int_X F G d\mu \frac{dt}{t}. \tag{11}$$

由 (6) 式, 可得

$$\int_0^\infty \int_X |FG| d\mu \frac{dt}{t} < \infty.$$

利用 Lebesgue 控制收敛定理和 Fubini 定理推出

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_X F G d\mu \frac{dt}{t} &= \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \int_X \left(\int_\delta^N t \partial_t H_t u_\varepsilon t \partial_t H_t (I - H_{r_B^2}) g \frac{dt}{t} \right) d\mu \\ &= \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \int_X u_\varepsilon \left(\int_\delta^N (t \partial_t H_t)^2 (I - H_{r_B^2}) g \frac{dt}{t} \right) d\mu \\ &= K_1 + K_2. \end{aligned}$$

对于 K_1 , 我们由谱定理^[20] 可得

$$h = 4 \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \int_\delta^N (t \partial_t H_t)^2 h \frac{dt}{t}, \quad \forall h \in L^2(X),$$

由 $(I - H_{r_B^2})g \in L^2(X)$ 可知

$$(I - H_{r_B^2})g = 4 \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \int_\delta^N (t \partial_t H_t)^2 (I - H_{r_B^2})g \frac{dt}{t}. \quad (12)$$

这样我们得到

$$4 \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \int_{4B} u_\varepsilon \left(\int_\delta^N (t \partial_t H_t)^2 (I - H_{r_B^2})g \frac{dt}{t} \right) d\mu = \int_{4B} u_\varepsilon (I - H_{r_B^2})g d\mu. \quad (13)$$

对于 K_2 , 利用 Gaussian 上界和双倍性质可得

$$\begin{aligned} \sup_{\delta > 0, N > 0} \left| \int_\delta^N (t \partial_t H_t)^2 (I - H_{r_B^2})g(x) \frac{dt}{t} \right| &= \sup_{\delta > 0, N > 0} \left| \int_\delta^N (t \partial_t H_t)^2 \int_0^{r_B^2} s \partial_s H_s g(x) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right| \\ &\leq \sup_{\delta > 0, N > 0} \int_\delta^N \int_0^{r_B^2} \frac{t^2 s}{(2t+s)^3} \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \int_X \left| r^3 \frac{\partial^3 h_r(x, y)}{\partial r^3} \Big|_{r=2t+s} \right| |g(y)| d\mu(y) \\ &\leq C \int_0^\infty \int_0^{r_B^2} \frac{t^2 s}{(2t+s)^3} \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \int_B \frac{(2t+s)^{1/2}}{2d(x, x_B)} \frac{|g(y)|}{\mu(B(x_B, r_B + d(x, x_B)))} d\mu(y) \\ &\leq C \frac{r_B \|g\|_{L^1(B)}}{(r_B + d(x, x_B)) \mu(B(x_B, r_B + d(x, x_B)))}. \end{aligned}$$

因此, 我们有

$$\left| u_\varepsilon \int_\delta^N (t \partial_t H_t)^2 (I - H_{r_B^2})g(x) \frac{dt}{t} \right| \leq C \frac{r_B \|g\|_{L^1(B)} |u_\varepsilon(x)|}{[r_B + d(x, x_B)] \mu(B(x_B, r_B + d(x, x_B)))}.$$

再由 Hölder 不等式及引理 2 (ii) 知

$$\begin{aligned} \sup_{\delta > 0, N > 0} \left| \int_{4B^c} u_\varepsilon \left(\int_\delta^N (t \partial_t H_t)^2 (I - H_{r_B^2})g \frac{dt}{t} \right) d\mu \right| &\leq C \|g\|_{L^1(B)} \int_X \frac{r_B |u_\varepsilon(x)|}{[r_B + d(x, x_B)] \mu(B(x_B, r_B + d(x, x_B)))} d\mu(x) \\ &\leq C \|g\|_{L^1(B)} \left(\int_X \frac{r_B |u_\varepsilon(x)|^2}{[r_B + d(x, x_B)] \mu(B(x_B, r_B + d(x, x_B)))} d\mu(x) \right)^{1/2} \leq C \|g\|_{L^1(B)}, \end{aligned}$$

上式说明极限和积分可以交换顺序, 再结合 (12) 式可得

$$4 \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \int_{4B^c} u_\varepsilon \left(\int_\delta^N (t \partial_t H_t)^2 (I - H_{r_B^2})g \frac{dt}{t} \right) d\mu = 4 \int_{4B^c} u_\varepsilon \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ N \rightarrow +\infty}} \left(\int_\delta^N (t \partial_t H_t)^2 (I - H_{r_B^2})g \frac{dt}{t} \right) d\mu = \int_{4B^c} u_\varepsilon (I - H_{r_B^2})g d\mu. \quad (14)$$

结合 (13) 式和 (14) 式可知 (11) 式成立。

第三步 现在我们利用第一步和第二步结论来证明 $\{u_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon > 0}$ 在 $BMO(X)$ 中一致有界。由注 1 (BMO 空

间等价刻画) 可知, 只需证 $\{u_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon>0}$ 满足其中 (i), (ii) 两个条件且有一致上界即可。

首先, 因为 $u \in \text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)$, 故由引理 3.2 (ii) 知

$$\int_X \frac{|u_\varepsilon(x)|^2}{(1 + d(x, x_0))^\beta \mu(B(x_0, 1 + d(x, x_0)))} d\mu(x) \leq C_{(x_0, \varepsilon, \beta)} < \infty,$$

从而 u_ε 满足第一个条件。

其次, 由第二步结论可知, 对任意 $g \in L^2(B)$,

$$\left| \int_X u_\varepsilon (I - H_{r_B^2}) g d\mu \right| = \left| 4 \int_0^\infty \int_X F G d\mu \frac{dt}{t} \right| \leq C [\mu(B)]^{1/2} \|g\|_{L^2(B)} \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)}.$$

再结合对偶定理, 可推出

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u_\varepsilon - H_{r_B^2} u_\varepsilon|^2 d\mu \right)^{1/2} &= [\mu(B)]^{-1/2} \sup_{\|g\|_{L^2(B)} \leq 1} \left| \int_X g (I - H_{r_B^2}) u_\varepsilon d\mu \right| \\ &= [\mu(B)]^{-1/2} \sup_{\|g\|_{L^2(B)} \leq 1} \left| \int_X u_\varepsilon (I - H_{r_B^2}) g d\mu \right| \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)} < \infty, \end{aligned}$$

其中常数 $C > 0$ 且与 ε 无关。故 u_ε 满足第二个条件, 因此函数族 $\{u_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon>0}$ 属于 $\text{BMO}(X)$, 且有一致上界 $\|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)}$ 。

4 定理 1 的证明

在第三节基础之上, 我们给出定理 1 的证明。

定理 1 的证明 第一步 证明对任意 $u \in \text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)$, 都存在 $f \in \text{BMO}(X)$, 使得 $u = H_t f$ 且

$$\|f\|_{\text{BMO}(X)} \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)},$$

其中常数 $C > 0$ 且和 u, f 无关。

我们知道, Hardy 空间 $H_1(X)$ 完备^[13], 且由引理 2 (v) 知函数族 $\{u_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon>0}$ 在 $\text{BMO}(X)$ 中一致有界。故利用 Banach-Alaoglu 定理知, 存在数列 $\varepsilon_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 和函数 $f_0 \in \text{BMO}(X)$ 使得当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $u_{\varepsilon_k} \rightarrow f_0$ (弱*收敛); 而由命题 2 (ii) 知, 对任意 $(y, t) \in X \times \mathbf{R}_+$, 有 $\partial_t h_t(\cdot, y) \in H^1(X)$, 故由弱*收敛定义可得

$$\int_X \partial_t h_t(x, y) u_{\varepsilon_k}(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f_0(x) \partial_t h_t(x, y) d\mu(x), \quad k \rightarrow \infty. \tag{15}$$

对于 (15) 式左端, 利用引理 2 (iii) 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \partial_t H_t u_{\varepsilon_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \partial_t u(x, t + \varepsilon_k) = \partial_t u(x, t),$$

由极限唯一性可得 $\partial_t u(x, t) = \partial_t H_t f_0(x)$ 。因此, 存在 $g(x)$ 使得 $u(x, t) = H_t f_0(x) + g(x)$ 。

注意到 $H_t f \rightarrow f (t \rightarrow 0)$ 在 $\text{BMO}(X)$ 中成立, 可以推出: 对任意 $h(x) \in H^1(X)$, 有

$$\int_X g(x) h(x) d\mu(x) = \int_X (H_{\varepsilon_k} f_0(x) - f_0(x)) h(x) d\mu(x) + \int_X (f_0(x) - u_{\varepsilon_k}(x)) h(x) d\mu(x).$$

上式两端对 k 取极限得

$$\int_X g(x) h(x) d\mu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \int_X (H_{\varepsilon_k} f_0(x) - f_0(x)) h(x) d\mu(x) + \int_X (f_0(x) - u_{\varepsilon_k}(x)) h(x) d\mu(x) \right\} = 0.$$

因为上式对任意 $h \in H^1(X)$ 都成立, 因此 $g \equiv$ 常数; 令 $f = f_0 + g$, 则有 $u(x, t) = H_t f$, 且由 Banach-Alaoglu 定理得 $\|f\|_{\text{BMO}(X)} \leq C \|u\|_{\text{TMO}(X \times \mathbf{R}_+)}$ 。

第二步 对任意 $f \in \text{BMO}(X)$, 因关于时间变量部分的估计与空间变量的思路相同, 故只需证明

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_0^{r_B^2} \int_B |\sqrt{t} \nabla_x H_t f|^2 d\mu \frac{dt}{t} \leq C \|f\|_{\text{BMO}(X)}^2, \quad (16)$$

其中常数 $C > 0$ 且与 f, B 无关。

将 f 分解为

$$f = f_B + (f - f_B) \chi_{2B} + (f - f_B) \chi_{2B^c} = f_1 + f_2 + f_3.$$

对于 f_1 由守恒律知其显然成立。

对于 f_2 , 由谱定理^[20]可知

$$\int_X \int_0^\infty |\sqrt{t} \partial_t H_t h|^2 \frac{dt}{t} d\mu = \frac{1}{2} \int_X |\Delta^{1/2} h|^2 d\mu. \quad (17)$$

再结合 Riesz 变换 $\nabla_x \Delta_x^{-1/2}$ 在 L^2 上的有界性和双倍性质, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B)} \int_0^{r_B^2} \int_B |\sqrt{t} \nabla_x H_t f_2|^2 d\mu \frac{dt}{t} &= \frac{1}{\mu(B)} \int_0^{r_B^2} \int_B |\nabla_x \Delta_x^{-1/2} (\sqrt{t} \Delta_x^{1/2} H_t f_2)|^2 d\mu \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{1}{\mu(B)} C \int_0^{r_B^2} \int_B |\sqrt{t} \Delta_x^{1/2} H_t f_2|^2 d\mu \frac{dt}{t} \leq \frac{C}{\mu(B)} \int_X \int_0^\infty |\sqrt{t} \partial_t H_t (\Delta_x^{-1/2} f_2)|^2 d\mu \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{C}{\mu(B)} \int_{2B} |f - f_B|^2 d\mu \leq C \|f\|_{\text{BMO}(X)}^2. \end{aligned}$$

对于 f_3 , 由 Gaussian 上界和双倍性质可得

$$\begin{aligned} |\sqrt{t} \nabla_x H_t f_3| &\leq \sum_{k=1}^\infty \int_{2^{k+1}B \setminus 2^k B} \frac{1}{\mu(B(y, \sqrt{t}))} \exp\left\{-\frac{d^2(x, y)}{ct}\right\} |f_3(y)| d\mu(y) \\ &\leq C \sum_{k=1}^\infty \int_{2^{k+1}B \setminus 2^k B} \frac{\sqrt{t}}{d(x, y)} \frac{|f(y) - f_B|}{\mu(B(x, d(x, y)))} d\mu(y) \leq C \frac{\sqrt{t}}{r_B} \frac{1}{\mu(2^{k+1}B)} \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} \int_{2^{k+1}B} |f(y) - f_B| d\mu(y) \\ &\leq C \frac{\sqrt{t}}{r_B} \sum_{k=1}^\infty \frac{k}{2^k} \|f\|_{\text{BMO}(X)} \leq C \frac{\sqrt{t}}{r_B} \|f\|_{\text{BMO}(X)}, \end{aligned}$$

因此有

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_0^{r_B^2} \int_B |\sqrt{t} \nabla_x H_t f_3|^2 d\mu \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{\mu(B)} \int_0^{r_B^2} \int_B \frac{t}{r_B^2} \|f\|_{\text{BMO}(X)}^2 d\mu \frac{dt}{t} \leq C \|f\|_{\text{BMO}(X)}^2.$$

综上所述 (16) 式, 再结合第一步结论知定理 1 得证。

参考文献:

- [1] FABES E B, NERI U. Characterization of temperatures with initial data in BMO[J]. Duke Mathematical Journal, 1975, 42: 725-734.
- [2] DUONG X T, YAN L X, ZHANG C. On characterization of Poisson integrals of Schrödinger operators with BMO traces[J]. Journal of Functional Analysis, 2014, 266(4): 2053-2085.
- [3] JIANG R J, XIAO J, YANG D C. Towards spaces of harmonic functions with traces in square Campanato spaces and their scaling invariants[J]. Analysis and Applications, 2016, 14(5): 679-703.
- [4] FABES E B, JOHNSON R L, NERI U. Spaces of harmonic functions representable by Poisson integrals of functions in BMO and $L_{p,\lambda}$ [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1976, 25(2): 159-170.
- [5] CHEN J C. A representation theorem of harmonic functions and its application to BMO on manifolds[J]. Applied Mathematics, 2001, 16: 279-284.
- [6] ZHANG H C, ZHU X P. On a new definition of Ricci curvature on Alexandrov spaces[J]. Acta Mathematica Scientia, Series B(English Edition), 2010, 30(6): 1949-1974.
- [7] ZHANG H C, ZHU X P. Yau's gradient estimates on Alexandrov spaces[J]. Journal of Differential Geometry, 2012, 91(3):

- 445–522.
- [8] AMBROSIO L, GIGLI N, SAVARÉ G. Bakry–Émery curvature–dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds [J]. *The Annals of Probability*, 2015, 43(1): 339–404.
- [9] AMBROSIO L, GIGLI N, SAVARÉ G. Density of Lipschitz functions and equivalence of weak gradients in metric measure spaces[J]. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2013, 29: 969–996.
- [10] JIANG R J. The Li–Yau inequality and heat kernels on metric measure spaces[J]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2015, 104(1): 29–57.
- [11] GIGLI N. On the differential structure of metric measure spaces and applications [J/OL]. (2013–05–21)[2020–04–30]. <https://arxiv.org/pdf/1205.6622.pdf>.
- [12] ERBAR M, KUWADA K, STURM K T. On the equivalence of the entropic curvature–dimension condition and Bochner’s inequality on metric measure spaces[J]. *Inventiones Mathematicae*, 2015, 201: 993–1071.
- [13] HOFMANN S, LU G, MITREA D, et al. Hardy spaces associated to non–negative self–adjoint operators satisfying Davies–Gaffney estimates [J/OL]. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 2011, 214(1007): 1–84.
- [14] STURM K T. On the geometry of metric measure spaces II[J]. *Acta Mathematica*, 2006, 196: 133–177.
- [15] RAJALA T. Interpolated measures with bounded density in metric spaces satisfying the curvature–dimension conditions of Sturm[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2012, 263: 896–924.
- [16] JIANG R J, LI H Q, ZHANG H C. Heat kernel bounds on metric measure spaces and some applications[J]. *Potential Analysis*, 2016, 44(3): 601–627.
- [17] DUONG X T, YAN L X. New function spaces of BMO type, the John–Nirenberg inequality, interpolation, and applications [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2005, 58(10): 1375–1420.
- [18] STURM K T. Analysis on local dirichlet spaces III [J]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1996, 75(3): 273–297.
- [19] HOU Q, SALOFF–COSTE L. Time regularity for local weak solutions of the heat equation on local Dirichlet spaces [J/OL]. (2019–11–30)[2020–04–03]. <https://arxiv.org/abs/1912.12998>.
- [20] ZHANG H C, ZHU X P. Local Li–Yau’s estimates on $RCD^*(K, N)$ metric measure spaces[J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2016, 55: 30.
- [21] DZIUBAŃSKI J, GARRIGÓS G, MARTÍNEZ T, et al. BMO spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality[J]. *Mathematische Zeitschrift*, 2005, 249: 329–356.

(责任编辑 王海蓉)